

Examenul național de bacalaureat 2025

**Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat***

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_3 = 19$ și $a_4 = 25$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că $f(2) = 8$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2-x} - \frac{1}{625} \cdot 25^x = 0$.
- 5p** 4. Determinați câte submulțimi cu două elemente are mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 2)$, $B(2, 0)$ și $C(8, 2)$. Determinați lungimea segmentului DE , unde punctele D și E sunt mijloacele segmentelor OA , respectiv BC .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , cu $AB = 6$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2-2a & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 2$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $M(2) \cdot A = xM(1)$.
- 5p** c) Determinați numerele reale a pentru care $(M(a) - 2I_2) \cdot M(a) = (a+2)I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = (x-6)(y-6) + 6$.
- 5p** a) Arătați că $9 \circ 8 = 12$.
- 5p** b) Arătați că $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Determinați numerele reale nenule x pentru care $x \circ \frac{6}{x} = 6x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5)\sqrt{x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$.
- 5p** c) Arătați că $f(x+2) - f(x) \leq 26$, pentru orice $x \in (0, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4\ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4\ln x) dx = \frac{7}{3}$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x) - x^2}{x} dx = 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care $\int_1^2 (f(x)f''(x) + (f'(x))^2) dx = m(f(2) - f(1))$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei este $r = a_4 - a_3 = 6$ $a_1 = a_3 - 2r = 7$	3p 2p
2.	$f(2) = 4 + a$ $4 + a = 8$, de unde obținem $a = 4$	2p 3p
3.	$5^{2-x} - 5^{-4} \cdot 5^{2x} = 0$, deci $5^{2-x} = 5^{2x-4}$, de unde obținem $2 - x = 2x - 4$ $x = 2$	3p 2p
4.	$C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} =$ $= 15$	3p 2p
5.	$D(1,1)$ și $E(5,1)$ $DE = 4$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC}$, deci $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC}$, de unde obținem $BC = 4\sqrt{3}$ $R = \frac{BC}{2}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC , deci $R = 2\sqrt{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 =$ $= 0 + 2 = 2$	3p 2p
b)	$M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $M(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M(1)$ $2M(1) = xM(1)$, de unde obținem $x = 2$	3p 2p
c)	$M(a) - 2I_2 = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 2-2a & -a \end{pmatrix}$, $(M(a) - 2I_2) \cdot M(a) = \begin{pmatrix} a^2-4a+2 & 0 \\ 0 & a^2-4a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $\begin{pmatrix} a^2-4a+2 & 0 \\ 0 & a^2-4a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & a+2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 5$	3p 2p
2.a)	$9 \circ 8 = (9-6)(8-6) + 6 =$ $= 6 + 6 = 12$	3p 2p
b)	$x \circ 7 = (x-6)(7-6) + 6 = x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x $7 \circ x = (7-6)(x-6) + 6 = x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	2p 3p

c)	$x \circ \frac{6}{x} = \frac{6(x-6)(1-x)}{x} + 6$, pentru orice număr real nenul x	2p
	$\frac{6(x-6)(1-x)}{x} + 6 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, de unde obținem $x = 1$ sau $x = 3$, care convin	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2x\sqrt{x} + (x^2 - 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$	3p
	$= \frac{5x^2 - 5}{2\sqrt{x}} = \frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5(x-1)(x+1)}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2x^2} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{2} = \frac{5}{2}$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$x \in (0, 2] \Rightarrow x+2 \in (2, 4]$, deci $f(x) \geq f(1)$ și $f(x+2) \leq f(4)$ și, cum $f(1) = -4$ și $f(4) = 22$, obținem $f(x+2) - f(x) \leq 26$, pentru orice $x \in (0, 2]$	3p
2.a)	$\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _1^2 =$	3p
	$= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$	2p
b)	$\int_1^e \frac{f(x) - x^2}{x} dx = \int_1^e \frac{4 \ln x}{x} dx = 4 \int_1^e \ln x (\ln x)' dx = 2 \ln^2 x \Big _1^e =$	3p
	$= 2 \ln^2 e - 2 \ln^2 1 = 2$	2p
c)	$\int_1^2 (f(x)f''(x) + (f'(x))^2) dx = \int_1^2 (f(x)f'(x))' dx = (f(x)f'(x)) \Big _1^2 = f(2)f'(2) - f(1)f'(1)$	3p
	$f'(x) = 2x + \frac{4}{x}, x \in (0, +\infty)$; $f'(1) = f'(2) = 6$, deci $6(f(2) - f(1)) = m(f(2) - f(1))$ și, cum $f(1) \neq f(2)$, obținem $m = 6$	2p

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $2i(6-i) + 3(1-4i) = 5$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 5$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f)(a) = 2a$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 4x - 4} = x\sqrt{2}$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, numărul 2^n să fie divizibil cu 16.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ și $B(2,4)$. Arătați că triunghiul OAB este dreptunghic în A .
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x + 2\cos 2x + 2\sin^2 \frac{x}{2}$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p** b) Arătați că $A(-1) \cdot A(x) = A(-2x-1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale, cu $m < n$, pentru care $A(-1) \cdot (A(m) + A(n)) = 2A(-4)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x \cdot 3^y + y \cdot 3^x$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 2 = 15$.
- 5p** b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Determinați numărul real nenul x pentru care $x \circ (3x) = (2x) \circ (2x)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 3x + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x^2 + x)}{(x^2 + 3x + 3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) - f(y) \leq \frac{3-e}{3e}$, pentru orice numere reale x și y , cu $x \leq 0 \leq y$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 1 + 3x \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x \ln x) dx = 7$.

- | | |
|----|--|
| 5p | b) Arătați că $\int_1^e \frac{f(x) - 4x - 1}{x} dx = 3$. |
| 5p | c) Determinați numărul real a pentru care $\int_2^4 \frac{f(x) - 1}{x^2 \ln x} dx = a \ln 2$. |

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$q = \frac{b_4}{b_3} = 2$, unde q este rația progresiei geometrice	2p
	$b_1 = \frac{b_3}{q^2}$, deci $b_1 = \frac{40}{4} = 10$	3p
2.	$f(x) = 0$ are două soluții reale distincte, deci $4 - 4m > 0$	3p
	$m \in (-\infty, 1)$	2p
3.	$3^x + 6 \cdot 3^x = 63$, deci $3^x = 9$	3p
	$x = 2$	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	Cum $10^2 \leq n^2 \leq 31^2$, obținem 22 de cazuri favorabile, deci $p = \frac{22}{90} = \frac{11}{45}$	3p
5.	$\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$	3p
	$\overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + \vec{j}$, deci punctul D are coordonatele $(3, 1)$	2p
6.	$DC = 8$, $BD = 6$	3p
	$BC = 14$ și $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0 - 2 + 0 - 0 - 0 - 0 = -2$	3p
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2$, pentru orice număr real a	2p
	$\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ sau $a = 1$, deci sistemul de ecuații are soluție unică dacă și numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$	3p
c)	Pentru $a = 1$, soluțiile sistemului de ecuații sunt $(\alpha, \alpha + 1, 2\alpha)$, cu $\alpha \in \mathbb{C}$	2p
	$\alpha_1 + 1 = \alpha_2$ și $2\alpha_1 = \alpha_2 + 1$, de unde obținem $\alpha_1 = 2$ și $\alpha_2 = 3$, deci soluțiile sunt $(2, 3, 4)$ și $(3, 4, 6)$	3p

2.a)	$1 * 4 = \sqrt{1 \cdot 4} + \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 4}} + \frac{1+4}{2} - 2 =$	3p
	$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 2 = 3$	2p
b)	$x * x = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x}$, pentru orice $x \in M$	2p
	$\frac{2x^2 - 2x + 1}{x} = 1$, deci $2x^2 - 3x + 1 = 0$, de unde obținem $x = \frac{1}{2}$ sau $x = 1$, care convin	3p
c)	$x * y = \frac{(\sqrt{xy} - 1)^2}{\sqrt{xy}} + \frac{x+y}{2} \geq \frac{x+y}{2}$, pentru orice $x, y \in M$	3p
	Pentru $x, y \in [1, +\infty)$, rezultă $\frac{x+y}{2} \geq 1$, deci $x * y \in [1, +\infty)$, de unde obținem că $[1, +\infty)$ este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-2)}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x - (x+2)}{x^2} =$	3p
	$= \frac{6}{(x+2)^2} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{4(x-1)}{x(x+2)^2}$, $x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-2}{x+2} + \ln \frac{x+2}{x} \right) = 2 + 0 = 2$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ și, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = \ln 3$, f este continuă și, cum $1 < \ln 3 < 2$, obținem $n = 0$ sau $n = 1$	3p
2.a)	$\int_{-1}^2 (2x^2 + 1) f(x) dx = \int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big _{-1}^2 =$	3p
	$= \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = 3$	2p
b)	$\int_0^2 \sqrt{f(x)} dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + 1} \Big _0^2 =$	3p
	$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$	2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (2 + e^{-x}) dx$, $(n+1)I_n - I_{n+1} = \int_0^1 ((n+1)x^n - x^{n+1}) (2 + e^{-x}) dx =$	2p
	$= 2x^{n+1} \Big _0^1 - \frac{2x^{n+2}}{n+2} \Big _0^1 + \int_0^1 (x^{n+1} e^{-x})' dx = 2 - \frac{2}{n+2} + x^{n+1} e^{-x} \Big _0^1 = \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n	3p